Capítulo 9

INDUCCIÓN MATEMÁTICA SUMATORIAS

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

01 Demostrar por inducción matemática que para todo entero positivo n: $2^{2n+1}+3^{2n+1}$ es múltiplo de 5.

Solución:

Consideremos el conjunto: $S=\left\{n\in\mathbb{N}/2^{2n+1}+3^{2n+1}=\overset{\circ}{5}\right\}$; se desea probar que en S están todos los enteros positivos ($S=\mathbb{N}$), para lo cual basta que se verifiquen las condiciones del principio de inducción matemática. Veamos:

a. Para $n=1$:

En el primer miembro de la igualdad:

$$2^{2(1)+1}+3^{2(1)+1}=2^3+3^3=35=\overset{\circ}{5}$$

Como la expresión es múltiplo de 5, entonces: $(n=1)\in S$

b. Para $n=m$:

Supongamos $(n=m)\in S$, entonces la siguiente igualdad es verdadera:

$$2^{2m+1}+3^{2m+1}=\overset{\circ}{5} \qquad \ldots(1*)$$

c. Para $n=m+1$:

Debemos probar $(n=m+1)\in S$, es decir:

$$2^{2(m+1)+1}+3^{2(m+1)+1}=\overset{\circ}{5} \qquad \ldots(2*)$$

Operando en el miembro de la izquierda de la igualdad:

$$\begin{aligned}2^{2(m+1)+1}+3^{2(m+1)+1}&=2^{2m+3}+3^{2m+3}\\&=2^{(2m+1)+2}+3^{(2m+1)+2}\\&=2^2.2^{2m+1}+3^2.3^{2m+1}\\&=4\cdot2^{2m+1}+9\cdot3^{2m+1}\\&=4\cdot2^{2m+1}+(4+5)\cdot3^{2m+1}\\&=4\left(2^{2m+1}+3^{2m+1}\right)+5\left(3^{2m+1}\right)\end{aligned}$$

De (1*):

$$=4(\overset{\circ}{5})+5(\overset{\circ}{5})$$

$$2^{2(m+1)+1}+3^{2(m+1)+1}=\overset{\circ}{5}$$

Como se ha probado que la expresión (2∗) también es múltiplo de 5, entonces se concluye que:

$$(m+1)\in S \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

O en forma equivalente:

$$2^{2n+1} + 3^{2n+1} = \overset{\circ}{5}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}$$

02 Probar por inducción matemática que la suma de los cubos de cualesquiera de tres números enteros positivos consecutivos es un múltiplo de 3.

Solución:

Si "$n-1$", "n", "$n+1$" son los tres números enteros positivos, entonces se debe probar que:

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = \overset{\circ}{3}\ ;\ \forall n \in \mathbb{Z}^+ \qquad \ldots(1*)$$

Consideremos el conjunto:

$$S = \{n \in \mathbb{N} / (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = \overset{\circ}{3}\}$$

Se debe probar que en el conjunto S están todos los enteros positivos ($S = N$), para ello bastará con que se verifique las condiciones del principio de inducción matemática.

Veamos:

a. Para $n=1$:

En el primer miembro de la igualdad (1∗):

$$(1-1)^3 + 1^3 + (1+1)^3 = 9 = \overset{\circ}{3} \Rightarrow (n=1)\in S$$

b. Para $n=m$:

Supongamos $(n=m)\in S$, entonces la siguiente expresión es verdadera :

$$(m-1)^3 + m^3 + (m+1)^3 = \overset{\circ}{3} \qquad \ldots(2*)$$

c. Para $n=m+1$:

Debemos probar $(n=m+1)\in S$, es decir:

$$((m+1)-1)^3 + m^3 + ((m+1)+1)^3 = \overset{\circ}{3} \qquad \ldots(3*)$$

Operando en el miembro de la izquierda de la expresión (1∗):

$$\begin{aligned}
((m+1)-1)^3 + (m+1)^3 + ((m+1)+1)^3 &= m^3 + (m+1)^3 + (m+2)^3 \\
&= m^3 + (m+1)^3 + (m^3 + 2m^2 + 4m + 8) \\
&= m^3 + (m+1)^3 + ((m^3 - m^2 + m - 1) + (3m^2 + 3m + 9)) \\
&= m^3 + (m+1)^3 + ((m-1)^3 + 3(m^2 + m + 3)) \\
&= [m^3 + (m+1)^3 + (m-1)^3] + 3(m^2 + m + 3) \\
\text{De (2*):} \qquad &= [\overset{\circ}{3}] + 3(m^2 + m + 3) \\
&= \overset{\circ}{3} + \overset{\circ}{3}
\end{aligned}$$

$$((m+1)-1)^3 + (m+1)^3 + ((m+1)+1)^3 = \overset{\circ}{3}$$

Como se ha probado que la expresión (3∗) también es múltiplo de 3, entonces se concluye que:

$$(m+1)\in S \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

O en forma equivalente:

$$(m-1)^3 + m^3 + (m+1)^3 = \overset{\circ}{3}\ ;\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

3.- Si k es un entero diferente de cero; demostrar que para todo $n \in Z^+$, $[(k+1)^n - 1]/k$ es un entero.

Solución

Formamos el conjunto S: $S = \left\{ n \in N \ / \ \frac{(k+1)^n - 1}{k} \text{ es un entero} \right\}$

Veamos:

a) ¿1 ∈ S?. Para $n = 1 \implies \frac{(k+1)^1 - 1}{k} = \frac{k+1-1}{k} = 1$ = es un entero $\implies n = 1 \in S$

b) Supongamos que $n = m \in S$, es decir que se cumple que: $\frac{(k+1)^m - 1}{k}$ es un entero. ...(1)

Debemos probar que $n = (m+1) \in S$, es decir que $\frac{(k+1)^{m+1} - 1}{k}$ es un entero.

Comenzamos: $\frac{(k+1)^{m+1} - 1}{k} = \frac{(k+1)^m (k+1) - 1}{k} =$

$$= \frac{(k+1)^m (k+1) - (k+1) + (k+1) - 1}{k} =$$

$$= \frac{(k+1)\left[(k+1)^m - 1\right] + k}{k} = (k+1)\left[\frac{(k+1)^m - 1}{k}\right] +$$

$$+ \frac{k}{k} = (k+1) \text{ (un entero)} + 1 = \text{entero, (hemos usado (1)}$$

y el hecho de que k es un entero).

Luego, $n = (m+1) \in S$, es decir: $\frac{(k+1)^n - 1}{k}$ es un entero.

4.- Demostrar, usando el principio de inducción matemática, que para todo n entero positivo, $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Solución : Consideremos el conjunto:

$$S = \left\{ n \in N \ / \ \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \right\}$$

Probaremos que en S están todos los enteros positivos; es decir, $S = N$, para lo cual sólo es necesario que se verifiquen las 2 condiciones del principio de inducción matemática.

Veamos:

a) ¿$1 \in S$?. Para $n = 1$, tenemos: $\dfrac{1}{1 \times (1+1) \times (1+2)} = \dfrac{1}{6}$ ...(1)

Llevando (1) a la forma del miembro derecho, tenemos: $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}$

Luego, $1 \in S$.

b) Supongamos que $n = m \in S$, es decir que:

$$\frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{2\times 3\times 4} + \frac{1}{3\times 4\times 5} + \dots + \frac{1}{m(m+1)(m+2)} = \frac{m(m+3)}{4(m+1)(m+2)}$$

es verdadero ...(2)

Debemos probar que $n = (m+1) \in S$, es decir:

$$\frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{2\times 3\times 4} + \frac{1}{3\times 4\times 5} + \dots + \frac{1}{m(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$$= \frac{(m+1)(m+4)}{4(m+2)(m+3)} \quad \dots(3)$$

Para demostrar (3) partimos del miembro izquierdo de (3) y usando la hipótesis de inducción (2), llegaremos al miembro derecho de (3). Veamos:

$$\underbrace{\frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{2\times 3\times 4} + \frac{1}{3\times 4\times 5} + \dots + \frac{1}{m(m+1)(m+2)}}_{(\alpha)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$= \dfrac{m(m+3)}{4(m+1)(m+2)} + \dfrac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)}$. (Hemos usado para ($\alpha$), la expresión (2))

$$= \frac{m(m+3)^2 + 4}{4(m+1)(m+2)(m+3)} = \frac{m^3 + 6m^2 + 9m + 4}{4(m+1)(m+2)(m+3)} =$$

$$= \frac{(m+1)(m+1)(m+4)}{4(m+1)(m+2)(m+3)} = \frac{(m+1)(m+4)}{4(m+2)(m+3)}$$

Con lo cual se concluye que $n = (m+1) \in S$; es decir que $S = \mathbb{N}$

Sea $\{x_k \,/\, k = 1, 2 \dots\}$ el conjunto de números reales, definidos de la siguiente manera: $x_1 = 4$

$$x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k} \quad ; \; k = 1, 2, \dots$$

Demostrar por inducción, que para todo $n \in Z^+$, $x_{2n} < x_{2n+2}$ y

$x_{2n+1} < x_{2n-1}$

Solución

Vemos que: $x_1 = 4$, $x_2 = 1 + \dfrac{1}{x_1} = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$, $x_3 = 1 + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{9}{5}$,

$x_4 = 1 + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{14}{9}$ y así sucesivamente.

El conjunto S es de la forma: $S = \left\{ n \in \mathbb{Z}^+ \ / \ x_{2n} < x_{2n+2} \text{ y } x_{2n+1} < x_{2n-1} \right\}$

a) ¿$1 \in S$?. Para $n = 1 \Longrightarrow x_2 = \dfrac{5}{4} < \dfrac{14}{9} = x_{2+2}$ y $x_3 = \dfrac{9}{5} < 4 = x_1$

Luego: $x_2 < x_{2+2}$ y $x_{2+1} < x_{2-1} \Longrightarrow n = 1 \in S$

b) Supongamos que $n = m \in S$, es decir que:

$$x_{2m} < x_{2m+2} \quad \text{y} \qquad \ldots(1)$$

$$x_{2m+1} < x_{2m-1} \quad \text{(se cumplen)} \qquad \ldots(2)$$

Debemos probar que: $n = (m + 1) \in S$, es decir que:

$$x_{2(m+1)} < x_{2(m+1)+2} \quad \text{y} \qquad \ldots(3)$$

$$x_{2(m+1)+1} < x_{2(m+1)-1} \qquad \ldots(4)$$

Veamos primeramente para (3), (para lo cual usaremos (1)):

Sabemos que: $x_{2m} < x_{2m+2} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x_{2m}} > \dfrac{1}{x_{2m+2}} \Longleftrightarrow 1 + \dfrac{1}{x_{2m}} > 1 + \dfrac{1}{x_{2m+2}}$

$\Longleftrightarrow x_{2m+1} > x_{2m+3} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x_{2m+1}} < \dfrac{1}{x_{2m+3}} \Longleftrightarrow 1 + \dfrac{1}{x_{2m+1}} < 1 +$

$+ \dfrac{1}{x_{2m+3}} \Longleftrightarrow x_{(2m+1)+1} < x_{(2m+3)+1} \Longleftrightarrow x_{2(m+1)} < x_{2(m+1)+2}$, que

es lo que queríamos demostrar.

En forma similar se demuestra (4).

Usando (2): $x_{2m+1} < x_{2m-1} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x_{2m+1}} > \dfrac{1}{x_{2m-1}} \Longleftrightarrow 1 + \dfrac{1}{x_{2m+1}} > 1 +$

$+ \dfrac{1}{x_{2m-1}} \Longleftrightarrow x_{(2m+1)+1} > x_{(2m-1)+1} \Longleftrightarrow x_{2m+2} > x_{2m}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{x_{2m+2}} < \dfrac{1}{x_{2m}} \Longleftrightarrow 1 + \dfrac{1}{x_{2m+2}} < 1 + \dfrac{1}{x_{2m}}$

$\Longleftrightarrow x_{(2m+2)+1} < x_{(2m)+1} \Longleftrightarrow x_{2(m+1)+1} < x_{2(m+1)-1}$, que es

lo que queríamos demostrar.

Luego, $n = (m+1) \in S$, es decir: $x_{2n} < x_{2n+2}$ y $x_{2n+1} < x_{2n-1}$

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

6.- Si $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. Definimos $x_1 = \sqrt[3]{60}$ y $x_{n+1} = \sqrt[3]{60 + x_n}$ para $n \geq 1$, entero positivo. Probar por inducción que:

a) $x_n < x_{n+1}$; para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

b) $x_n < 4$; para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

Solución

a) Sea $S = \{n / x_n < x_{n+1}\}$ con $x_1 = \sqrt[3]{60}$ y $x_{n+1} = \sqrt[3]{60 + x_n}$

Por Inducción Matemática:

i) Veamos si $1 \in S$. En efecto, $x_1 = \sqrt[3]{60} < x_2 = \sqrt[3]{60 + \sqrt[3]{60}}$ $\Longrightarrow 1 \in S$

ii) Hipótesis Inductiva (H.I): Supongamos que $m \in S$ $\Longrightarrow x_m < x_{m+1}$

iii) Veamos si $(m+1) \in S$, lo que es equivalente a probar que: $x_{m+1} < x_{m+2}$

Partamos de la Hipótesis Inductiva: $x_m < x_{m+1}$

$$60 + x_m < 60 + x_{m+1}$$

$$\sqrt[3]{60 + x_m} < \sqrt[3]{60 + x_{m+1}}$$

$$x_{m+1} < x_{m+2}$$

Como $(m+1) \in S \Longrightarrow S$ es el conjunto de los números naturales y $x_n < x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

b) Sea $S = \{n / x_n < 4\}$

Por Inducción Matemática:

i) ¿$1 \in S$? $x_1 = \sqrt[3]{60} < \sqrt[3]{64} = 4$. Luego, $1 \in S$

ii) H.I.: Supongamos que $m \in S$, esto es, $x_m < 4$

iii) ¿$(m+1) \in S$? Partimos de H.I. $x_m < 4$

$$60 + x_m < 64$$

$$\sqrt[3]{60 + x_m} < \sqrt[3]{64} = 4$$

$\Rightarrow x_{m+1} < 4 \Longrightarrow (m+1) \in S$

Conclusión: $x_n < 4 \ \forall n \in Z^+$

7.- Sea $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ un conjunto de números reales positivos. Si $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{a_n}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Demostrar por inducción Matemática que: $a_{n+1} > a_n \ \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

Solución

Como $a_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{a_n}}$ y $a_1 = 1 \Longrightarrow a_2 = \sqrt{2}$

Sea $S = \{n \in \mathbb{N} \ / \ a_{n+1} > a_n, n \in \mathbb{N}\}$, donde $a_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{a_n}}$

1°) ¿$1 \in S$? Esto es verdadero ya que: $a_2 = \sqrt{2} > a_1 = 1$

2°) Hipótesis Inductiva: Supongamos que $m \in S$, esto es, que

$$a_{m+1} > a_m \qquad \ldots(\alpha)$$

3°) Veamos si $(m+1) \in S$, (debemos probar que $a_{m+2} > a_{m+1}$)

De (α): $a_{m+1} > a_m \Longrightarrow \sqrt{a_{m+1}} > \sqrt{a_m} \Longleftrightarrow 1 + \sqrt{a_{m+1}} > 1 + \sqrt{a_m}$

$\Longleftrightarrow \sqrt{1 + \sqrt{a_{m+1}}} > \sqrt{1 + \sqrt{a_m}} \Longleftrightarrow a_{m+2} > a_{m+1} \Longleftrightarrow (m+1) \in S$

Conclusión: $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

8.- Demostrar por Inducción Matemática: $(1)(2) + (2)(3) + \ldots + n(n+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2) \quad \forall n \geq 1, \ n \in \mathbb{N}$

Solución

Sea $S = \{n \in \mathbb{N} \ / \ (1)(2) + (2)(3) + \ldots + n(n+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)\}$

1°) Veamos si $1 \in S$

$$1 \times 2 = \frac{1}{3}(1+1)(1+2) \Longleftrightarrow 2 = 2$$

$$\Longrightarrow 1 \in S$$

2°) Supongamos que $m \in S$, esto es, que se cumple:

$$(1)(2) + (2)(3) + \ldots + m(m+1) = \frac{m}{3}(m+1)(m+2) \qquad \ldots(\alpha)$$

3°) Veamos si $(m+1) \in S$

Por (α) se tiene:

$(1)(2) + (2)(3) + \ldots + m(m + 1) + (m + 1)(m + 2) =$

$= \frac{m}{3}(m + 1)(m + 2) + (m + 1)(m + 2)$

$= (m + 1)(m + 2)\left[\frac{m}{3} + 1\right]$

$= (m + 1)(m + 2)\,\frac{(m + 3)}{3}$

$= \frac{(m + 1)}{3}(m + 2)(m + 3)$ $\ldots(*)$

. De $(*)$ concluimos que $(m + 1) \in S$ y por la tanto (a) se cumple $\forall\, n \geq 1,\quad n \in \mathbb{N}$.

SUMATORIAS

1. Demostrar por inducción matemática, que para todo entero positivo n:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \quad , \; x \neq 1$$

Solución:

Se observa que la relación es válida para $n \geq 0$, mientras que, el primer principio de inducción matemática se aplica para $n \geq 1$, (es decir se empieza con $n = 1$).

En forma directa probaremos con $n = 0$ y después aplicamos inducción a partir de $n = 1$. Veamos:

Para $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} x^k + \frac{x}{1-x} = x^0 + \frac{x}{1-x} = \; = 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

con lo cual se verifica para $n = 0$ ...(1)

Consideremos el conjunto $S = \left\{ n \in \mathbb{N} \;/\; \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \right\}$; se desea probar que en S están todos los enteros positivos ($S = \mathbb{N}$), para lo cual basta que se verifiquen las dos condiciones del principio de inducción matemática. Veamos:

a) Para $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1} x^k + \frac{x^{1+1}}{1-x} = (x^0 + x) + \frac{x^2}{1-x} = (1+x) + \frac{x^2}{1-x} = \frac{1 - x + x - x^2 + x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$\Rightarrow n = 1 \in S$

b) Supongamos que $n = m \in S$, es decir que: $\sum_{k=0}^{m} x^k + \frac{x^{m+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ ...(2)

es verdadero.

Debemos probar que $n = (m+1) \in S$, es decir que:

$$\sum_{k=0}^{m+1} x^k + \frac{x^{(m+1)+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

Veamos:

$$\sum_{k=0}^{m+1} x^k + \frac{x^{(m+1)+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{m} x^k + x^{m+1} + \frac{x^{m+2}}{1-x} = \sum_{k=0}^{m} x^k + \frac{x^{m+1}(1-x) + x^{m+2}}{1-x} =$$

$$\sum_{k=0}^{m} x^k + \frac{x^{m+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \quad ; \quad \text{(por la relación (2))}$$

Con lo cual se concluye que $n=(m+1)\in S$, es decir $S=\mathbb{N}$.

Teniendo en cuenta (1), afirmamos que:

$$\sum_{k=0}^{n}x^k+\frac{x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}\ ,\ \forall n\geq 0$$

2. Mediante el principio de inducción matemática, demostrar que para todo n entero positivo.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$$

Solución:

Sea S el conjunto: $S=\left\{n\in\mathbb{N}\ /\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}\right\}$

Veamos:

a) Para $n=1$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{1}{8}=\frac{1}{2\times 4}=\frac{1\times 18}{18\times 2\times 4}=\frac{1(5+13)}{12(1+2)(1+3)}$$

$\Rightarrow\ n=1\in S$

b) Supongamos que $n=m\in S$; es decir, se cumple que:

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{m(5m+13)}{12(m+2)(m+3)}$$

debemos probar que $n=(m+1)\in S$; es decir que:

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{(m+1)[5(m+1)+13]}{12[(m+1)+2][(m+1)+3]}$$

Veamos:

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+1)(k+3)}+\frac{1}{[(m+1)+1][(m+1)+3]}=$$

$$\frac{m(5m+13)}{12(m+2)(m+3)}+\frac{1}{(m+2)(m+4)}=\frac{m(m+4)(5m+13)+12(m+3)}{12(m+2)(m+3)(m+4]}=$$

$$\frac{5m^3+33m^2+64m+36}{12(m+2)(m+3)(m+4]}=\frac{(m^2+3m+2)(5m+18)}{12(m+2)(m+3)(m+4]}=$$

$$= \frac{(m+2)(m+1)(5m+18)}{12(m+2)(m+3)(m+4)} = \frac{(m+1)[5(m+1)+13]}{12[(m+1)+2][(m+1)+3]}$$

$\Longrightarrow$ $n = (m+1) \in S$, es decir: $S = \mathbb{N}$ ó también:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$$

3.- Utilizando el primer principio de inducción matemática, demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a^{2^{k-1}}}{1-a^{2^k}} = \frac{a-a^{2^n}}{(1-a)(1-a^{2^n})}, \text{ para todo } n \in Z^+, \text{ donde } |a| \neq 1.$$

Solución

Sea $S = \left\{ n \in \mathbb{N} \ / \ \sum_{k=1}^{n} \frac{a^{2^{k-1}}}{1-a^{2^k}} = \frac{a-a^{2^n}}{(1-a)(1-a^{2^n})} \right\}$

a) ¿$1 \in S$?. Para $n = 1$, en el primer miembro de la igualdad, tenemos:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{a^{2^{k-1}}}{1-a^{2^k}} = \frac{a^{2^{1-1}}}{1-a^{2^1}} = \frac{a^{2^0}}{1-a^2} = \frac{a^1}{1-a^2} = \frac{a}{1-a^2} \qquad \ldots(1)$$

Llevando (1) a la forma del segundo miembro de la igualdad, tenemos:

$$\frac{a}{1-a^2} = \frac{a(1-a)}{(1-a)(1-a^2)} = \frac{a-a^2}{(1-a)(1-a^2)} = \frac{a-a^{2^1}}{(1-a)(1-a^{2^1})}$$

Luego: $$\sum_{k=1}^{1} \frac{a^{2^{k-1}}}{1-a^{2^k}} = \frac{a-a^{2^1}}{(1-a)(1-a^{2^1})}$$

$\Longrightarrow$ $n = 1 \in S$

b) Supongamos que $n = m \in S$, es decir: $$\sum_{k=1}^{m} \frac{a^{2^{k-1}}}{1-a^{2^k}} = \frac{a-a^{2^m}}{(1-a)(1-a^{2^m})} \qquad \ldots(2)$$

es verdadero

Debemos probar que $n = (m+1) \in S$, es decir:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{a^{2^{k-1}}}{1-a^{2^k}} = \frac{a-a^{2^{m+1}}}{(1-a)(1-a^{2^{m+1}})} \qquad \ldots(3)$$

Para demostrar (3) debemos partir del miembro izquierdo y usando la hipótesis de inducción (2), llegaremos al miembro derecho de (3).

Veamos: $$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{a^{2^{k-1}}}{1 - a^{2^k}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a^{2^{k-1}}}{1 - a^{2^k}} + \frac{a^{2^{m+1-1}}}{1 - a^{2^{m+1}}} \qquad \ldots (4)$$

(hemos usado la propiedad: $\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}$)

Continuamos: en la primera sumatoria de (4) usamos (2) (hipótesis de inducción)

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{a^{2^{k-1}}}{1 - a^{2^k}} = \frac{a - a^{2^m}}{(1 - a)(1 - a^{2^m})} + \frac{a^{2^m}}{1 - a^{2^{m+1}}} \qquad \ldots (5)$$

Vemos que $1 - a^{2^{m+1}} = 1 - a^{2^m \cdot 2} = 1 - (a^{2^m})^2 = (1 - a^{2^m})(1 + a^{2^m})$.
Reemplazando en (5):

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{a^{2^{k-1}}}{1 - a^{2^k}} = \frac{a - a^{2^m}}{(1 - a)(1 - a^{2^m})} + \frac{a^{2^m}}{(1 - a^{2^m})(1 + a^{2^m})} =$$

$$= \frac{(a - a^{2^m})(1 + a^{2^m}) + (1 - a)a^{2^m}}{(1 - a)(1 - a^{2^m})(1 + a^{2^m})} = \frac{a + a^{2^m+1} - a^{2^m} - a^{2^{m+1}} + a^{2^m} - a^{2^m+1}}{(1 - a)(1 - a^{2^m})(1 + a^{2^m})}$$

$$= \frac{a - a^{2^{m+1}}}{(1 - a)(1 - a^{2^{m+1}})}$$

Esto es lo que queríamos demostrar. Entonces $n = (m + 1) \in S$; es decir, $S = \mathbb{N}$ ó en forma equivalente:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a^{2^{k-1}}}{1 - a^{2^k}} = \frac{a - a^{2^n}}{(1 - a)(1 - a^{2^n})} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

4.- Demostrar por inducción que: $\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}3x + \ldots + \operatorname{sen}(2n - 1)x = \dfrac{1 - \cos 2nx}{2\operatorname{sen}x}$, para todo entero positivo n.

Solución

Sea $S = \left\{ n \,/\, \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}3x + \ldots + \operatorname{sen}(2n - 1) = \dfrac{1 - \cos 2nx}{2\operatorname{sen}x} \right\}$

Por Inducción Matemática:

1) ¿$1 \in S$? $\dfrac{1 - \cos 2x}{2\operatorname{sen}x} = \dfrac{2\operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen}x} = \operatorname{sen}x$. Si, $1 \in S$.

ii) H.I.: Supongamos que $m \in S$, esto es:

$$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}3x + \ldots + \operatorname{sen}(2m-1)x = \frac{1-\cos 2mx}{2\operatorname{sen}x}$$

iii) ¿$(m+1) \in S$? Veamos:

$$\operatorname{sen}x + \ldots + \operatorname{sen}(2m-1)x + \operatorname{sen}[2(m+1)-1]x = \frac{1-\cos 2mx}{2\operatorname{sen}x} +$$

$$+ \operatorname{sen}(2m+1)x = \frac{1-\cos 2mx + 2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}(2m+1)x}{2\operatorname{sen}x}$$

usando la inversa de transformación a producto:

$-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$. Entonces se tiene:

$$\frac{1-\cos 2mx - \cos(2m+2)x + \cos 2mx}{2\operatorname{sen}x} = \frac{1-\cos 2(m+1)x}{2\operatorname{sen}x}$$

Luego, $(m+1) \in S$ y en consecuencia $S = \mathbb{Z}^+$,

y $\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}3x + \ldots + \operatorname{sen}(2n-1)x = \dfrac{1-\cos 2nx}{\operatorname{sen}x}$ se cumple $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

6.- Calcular la suma de los cuadrados de los 10,000 primeros números enteros positivos impares.

Solución

Nos piden: $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots \quad = ?$

Conviene emplear como término general: $(2n-1)^2$, en cuyo caso la suma de los cuadrados de los 10,000 primeros números impares será:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2 \times 10{,}000 - 1)^2 = \sum_{k=1}^{10000} (2k-1)^2 = ?$$

Desarrollando el término que está dentro de las sumatoria, tenemos:

$$\sum_{k=1}^{10000} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{10000} (4k^2 - 4k + 1) = \sum_{k=1}^{10000} 4k^2 - \sum_{k=1}^{10000} 4k + \sum_{k=1}^{10000} 1 =$$

$$= 4\sum_{k=1}^{10000} k^2 - 4\sum_{k=1}^{10000} k + 1 \times 10{,}000 \quad \left(\text{propiedad: } \sum_{k=1}^{n} c = c.n\right)$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{6}(10{,}000)(10{,}000+1)(2 \times 10{,}000 + 1) -$$

$$- 4 \cdot \frac{1}{2}(10{,}000)(10{,}000+1) + 10{,}000$$

$$\frac{2}{3}\,10{,}000(10{,}001)(20{,}001) - 2\times 10{,}000\times 10{,}001 + 10{,}000$$
$$= 2\times 10{,}000^2 \times 10{,}001\left[\frac{20{,}001}{3} - 1\right]$$
$$= 2\times 10{,}000\times 10{,}001\times 6{,}666 = 133'333{,}333\times 10^4$$

6.- Calcular $\sum_{k=1}^{n}(3^{k-1} + 5^{k-1})$ y demostrar por el principio de inducción matemática que el resultado anterior se verifica para todo n entero positivo.

Nota: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$; $x \neq 1$.

Solución

$$\sum_{k=1}^{n}(3^{k-1} + 5^{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} 5^{k-1} =$$

Haciendo el cambio de subíndice:

$$= \sum_{k=0}^{n-1} 3^k + \sum_{k=0}^{n-1} 5^k = \frac{1 - 3^n}{1-3} + \frac{1 - 5^n}{1-5} = -\frac{3}{4} + \frac{2\times 3^n + 5^n}{4}$$

Luego, $\sum_{k=1}^{n}(3^{k-1} + 5^{k-1}) = \frac{2\times 3^n + 5^n - 3}{4}$

Efectuando la demostración por inducción matemática:

Sea $S = \left\{ n \in N \,/\, \sum_{k=1}^{n}(3^{k-1} + 5^{k-1}) = \frac{2\times 3^n + 5^n - 3}{4} \right\}$

Veamos:

a) ¿$1 \in S$?. Para $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1}(3^{k-1} + 5^{k-1}) = 3^{1-1} + 5^{1-1} = 2 = \frac{6+5-3}{4} =$

$= \frac{2\times 3 + 5 - 3}{4} \Longrightarrow n = 1 \in S$

b) Supongamos que $n = m \in S$; es decir, se cumple: $\sum_{k=1}^{n}(3^{k-1} + 5^{k-1}) =$

$= \frac{2\times 3^m + 5^m - 3}{4}$

Debemos probar que $n=(m+1)\in s$, es decir:

$$\sum_{k=1}^{m+1}\left(3^{k-1}+5^{k-1}\right)=\frac{2\times3^{m+1}+5^{m+1}-3}{4}$$

Veamos: $$\sum_{k}^{m+1}\left(3^{k-1}+5^{k-1}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(3^{k-1}+5^{k-1}\right)+\left(3^{m+1-1}+5^{m+1-1}\right)$$

$$=\frac{2\times3+5^{m}-3}{4}+\left(3^{m}+5^{m}\right)$$

$$=\frac{6\times3^{m}+5\times5^{m}-3}{4}$$

$$=\frac{2\times3^{m+1}+5^{m+1}-3}{4}$$

Luego, $n=(m+1)\in S$; es decir, $S=\mathbb{N}$ ó también:

$$\sum_{k-1}^{n}\left(3^{n-1}+5^{n-1}\right)=\frac{2\times3^{n}+5^{n}-3}{4}$$

7.- a) Calcular el valor de $\sum_{k=50}^{120}2(k-20)(k-23)$

b) Demostrar por inducción matemática que: $\frac{1}{2^n}\leq 1-\frac{1}{n+1}$

Solución

a) $$\sum_{k=50}^{120}2(k-20)(k-23)=2\sum_{k-1}^{71}(k+29)(k+26).\ =2\sum_{k-1}^{71}\left(k^2+55k+21\times26\right)$$

$$=2\sum_{k-1}^{71}k^2+110\sum_{k-1}^{71}k+2(29)(26)\sum_{k-1}^{71}1$$

$$=\frac{2}{6}(71)(72)(143)+\frac{110}{2}(71)(72)+2(29)(26)(71)=$$

$$=631{,}900$$

b) Consideramos el conjunto $S=\left\{n\in\mathbb{N}\,/\,\frac{1}{2^n}\leq1-\frac{1}{n+1}\right\}$; deseamos probar que $S=\mathbb{N}$, para lo cual se deben verificar las dos condiciones del primer principio de inducción matemática. Veamos:

i) ¿$1\in s$?. Para $n=1$, reemplazando en el miembro izquierdo:

$$\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{1+1} \Longrightarrow \frac{1}{2^1} \leq 1 - \frac{1}{1+1}$$

Luego, $n = 1 \in S$

ii) Supongamos que $n = m \in S$, es decir que: $\dfrac{1}{2^m} \leq 1 - \dfrac{1}{m+1}$ es verdadero.

...(1)

Verificaremos que $n = (m+1) \in S$, es decir que:

$$\frac{1}{2^{m+1}} \leq 1 - \frac{1}{(m+1)+1}$$

...(2)

Partiendo del miembro izquierdo de (2) y usando (1) debemos llegar al miembro derecho.

Veamos:

$$\frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{m+1}\right]$$

...(a)

Sabemos que: $m \geq 1 \Longrightarrow (m+1)^2 + 1 \geq 0 \Longrightarrow m^2 + 2m + 2 \geq 0$

$\Longrightarrow m^2 + 3m + 2 \geq m \Longrightarrow (m+2)(m+1) \geq m$

$\Longrightarrow \dfrac{m}{(m+2)(m+1)} \leq 1 \Longrightarrow \dfrac{2m+2-m-2}{(m+2)(2m+2)} \leq \dfrac{1}{2}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{m+2} - \dfrac{1}{2m+2} \leq \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \dfrac{1}{m+2} - \dfrac{1}{2m+2} \leq 1 - \dfrac{1}{2}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2m+2} \leq 1 - \dfrac{1}{m+2} \Longrightarrow \dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{1}{m+1}\right] \leq 1 - \dfrac{1}{m+2}$

Luego, en (a): $\dfrac{1}{2^{m+1}} \leq \dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{1}{m+1}\right] \leq 1 - \dfrac{1}{m+2}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{2^{m+1}} \leq 1 - \dfrac{1}{(m+1)+1}$

Luego, $n = (m+1) \in S$, es decir $S = \mathbb{N}$, o en forma equivalente:

$$\frac{1}{2^n} \leq 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nota: Para demostrar (2), hemos "enlazado" la expresión: $\dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{1}{m+1}\right]$ de (a) con la expresión $1 - \dfrac{1}{(m+1)+1}$ de (2), a través de: $\dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{1}{m+1}\right] \leq 1 - \dfrac{1}{(m+1)+1}$

Hemos desarrollado y se llegó a la expresión: $(m+1)^2 + 1 \geq 0$, lo cual siempre es verdadero. Después hemos "invertido" los pasos.

8.- Hallar el resultado de la siguiente suma: $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Sugerencia: Aplicar la propiedad telescópica.

Solución

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \qquad \ldots (1)$$

Pero, $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right]$

En (1): $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right]\right\} =$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right] \qquad \ldots (2)$$

Sea $a_k = \frac{1}{2k+1} \Rightarrow a_{k-1} = \frac{1}{2(k-1)+1} = \frac{1}{2k-1}$, $a_n = \frac{1}{2n+1}$, $a_0 = 1$

Aplicamos la propiedad telescópica en (2):

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n+1}-1\right] = \frac{n}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Nota: La propiedad telescópica es:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

Su variante: $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$